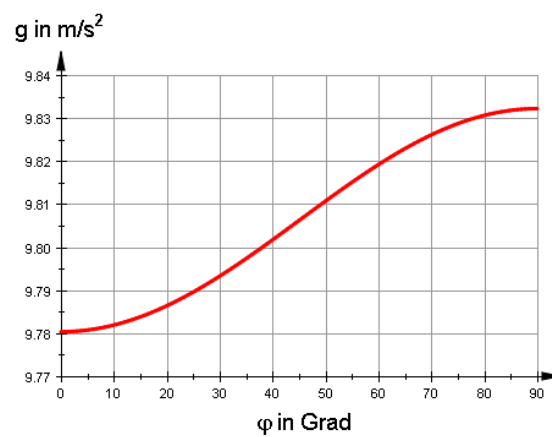


Aufgabensammlung

zum

RCL "Weltpendel"



S. Gröber
Technische Universität Kaiserslautern
September 2008

Inhaltsverzeichnis

0. Versuchsdaten	3
I. Aufgaben zur Theorie	5
1. Ursachen und Modelle der Breitengradabhängigkeit der Erdbeschleunigung	5
2. Bestimmung der Erdbeschleunigung in verschiedenen Pendelmodellen	5
3. Anharmonisches Pendel	6
4. Modellierung der Schwingungsbewegung	6
II. Aufgaben zum Versuchsaufbau	7
1. Bestimmung der Erdbeschleunigung im mathematischen Pendelmodell	7
2. Auslenkmechanismus des Pendels	7
3. Funktionsweise der Lichtschranke des Pendels	8
III. Aufgaben zur Versuchsdurchführung und Versuchsauswertung	9
1. Genaue Bestimmung der Erdbeschleunigung	9
2. Längenänderung des Drahtes während der Pendelbewegung	9
IV. Lösungen zu Aufgaben I	10 - 16
V. Lösungen zu Aufgaben II	17 - 21
VI. Lösungen zu Aufgaben III	22 - 24
VII. Literatur	25

0. Versuchsdaten

a) Allgemeine

Variablen

Breitengrad	φ
Temperatur am Standort	ϑ

Konstanten

Winkelgeschwindigkeit der Erde	$\omega_E = 7,27 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1}$
Masse der Erde	$m_E = 5,97 \cdot 10^{24} \text{ kg}$
Polradius der Erde	$r_{\text{P}} = 6378,2 \text{ km}$
Äquatorradius der Erde	$r_{\text{Ä}} = 6356,8 \text{ km}$
Erdbeschleunigung am Äquator	$g_{\text{Ä}} = 9,781 \text{ m/s}^2$
Erdbeschleunigung an den Polen	$g_{\text{P}} = 9,832 \text{ m/s}^2$
Dichte von Luft	$\rho_L = 1,3 \text{ kg/m}^3$

b) Pendelbezogene

Die Pendel des Weltpendels bestehen aus einer Aufhängung, einem Draht und einer Kugel. Relevante Punkte des Pendels sind der Drehpunkt D, der Punkt B an dem der Draht an der Kugel befestigt ist, der Pendelschwerpunkt S und der Kugelmittelpunkt = Kugelschwerpunkt M. Pendelgrößen sind:

Aufhängung (Index A)

Masse	$m_A = 56,9 \text{ g}$
Abstand Schwerpunkt-Drehpunkt	$l_{SA} = 7,468 \text{ mm}$
Trägheitsmoment	$J_A = 6,19 \cdot 10^{-5} \text{ kgm}^2$

Kugel (Index K)

Radius	$r_K = 4,274 \text{ cm}$
Masse	$m_K = 2,55 \text{ kg}$
Dichte	$\rho_K = 7,85 \text{ g/cm}^3$
Abstand Schwerpunkt-Drehpunkt	$DM = l_{SK} = l_M$
Trägheitsmoment	J_K
Volumen	V_K

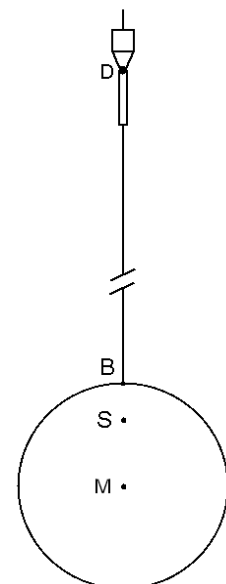


Abb. 1: Geometrie der Pendel.

Draht (Index D)

Länge (hängendes Pendel und Temperatur $\vartheta = 20\text{ °C}$)	$DB = l_D = 2,65721\text{ m}$
Radius	$r_D = 0,2\text{ mm}$
Dichte	$\rho_D = 7,95\text{ g/cm}^3$
Abstand Schwerpunkt-Drehpunkt	$l_{SD} = l_D/2$
Trägheitsmoment	J_D
Temperaturausdehnungskoeffizient	$\alpha_D = 1,7 \cdot 10^{-5}/\text{°C}$
Elastizitätsmodul	$E_D = 1,7 \cdot 10^{11}\text{ N/m}^2$
Querschnittsfläche	A_D
Volumen	V_D

Pendel (ohne Index)

Masse	$m = 2,61\text{ kg}$
Volumen	$V = 3,3 \cdot 10^{-4}\text{ m}^3$
Trägheitsmoment	$J = 18,596\text{ kgm}^2$
Abstand Schwerpunkt-Drehpunkt (hängendes Pendel und Temperatur $\vartheta = 20\text{ °C}$)	$DS = l_S = 2,6396\text{ m}$
Geschwindigkeit des Schwerpunkts	v_S
Schwingungsdauer	T
Anfänglicher Auslenkwinkel	α_0
Momentaner Auslenkwinkel	α
Winkelgeschwindigkeit	$\omega = \dot{\alpha}$
Winkelbeschleunigung	$\ddot{\alpha}$

I. Aufgaben zur Theorie

1. Ursachen und Modelle der Breitengradabhängigkeit der Erdbeschleunigung

- a) Erkläre qualitativ die Ursachen der Breitengradabhängigkeit der Erdbeschleunigung.
- b) Berechne im Modell der Erde als homogene ruhende Kugel vom Radius $r = r_p$ den Betrag $a_G(r, \vartheta, \varphi)$ und die Richtung der Gravitationsbeschleunigung und das Gravitationspotential $V_G(r, \vartheta, \varphi)$ innerhalb und außerhalb der Erde. Stelle a_G und V graphisch dar. Welche Werte ergeben sich auf der Erdoberfläche?
- c) Zur Berechnung der Breitengradabhängigkeit der Gravitationsbeschleunigung wird ein Punktmassenmodell des Erdellipsoids mit der Masse M im Mittelpunkt und den Massen m_1 und m_2 bei $\pm r_p$ verwendet: Wie kommt man zu dem Modell? Berechne unter der Annahme einer konstanten Erddichte die Massen M , m_1 und m_2 . Bestimme für den Äquator und die Pole Richtung und Betrag der Gravitationsbeschleunigung und das Gravitationspotential.
- d) Wie gut beschreibt das Modell aus c) die Breitengradabhängigkeit der Erdbeschleunigung? Wie sind die Unterschiede zu den experimentellen g -Werten am Äquator und den Polen zu erklären? Wie kann prinzipiell die Gravitationsfeldstärke ausgedehnter Körper berechnet werden?
- e) Welcher Anteil der Zentrifugalbeschleunigung a_Z ist für die Breitengradabhängigkeit der Erdbeschleunigung relevant? Berechne diesen Anteil für eine kugelförmige Erde mit Radius $r = r_A$. Wie kurz muss ein Erdtag sein, damit ein Mensch auf dem 50. Breitengrad schwerelos ist?
- f) Führe die Berechnung der Zentrifugalbeschleunigung in einem realistischeren Modell der Erde als Rotationsellipsoid durch. Welchen Schluss lässt der Vergleich mit dem Ergebnis aus e) zu?

2. Bestimmung der Erdbeschleunigung in verschiedenen Pendelmodellen

Das Pendel des RCLs werde als reales harmonisches Pendel mit einer geschwindigkeitsproportionalen Reibungskraft $F_R = cv_S$ und einer Auftriebskraft F_A betrachtet:

- a) Berechne das rücktreibende Drehmoment. Stelle die Differentialgleichung für den Auslenkwinkel α auf. Bestimme die Bewegungsgleichung $\alpha(t)$ und die Schwingungsdauer T des Pendels.
- b) Wie kann die Erdbeschleunigung g_r des realen Pendels experimentell bestimmt werden?
- c) Spezifiziere die Formel für g_r auf das physische (g_p) und das mathematische Pendel (g_m). Welche Größer-kleiner-Relationen zwischen g_r , g_p und g_m lassen sich aufstellen?

3. Anharmonisches Pendel

- a) Weshalb ist ein Pendel ein anharmonischer Schwinger? Bis zu welchem Ausschlagwinkel ist die Abweichung durch eine harmonische Näherung kleiner als 1 %? Begründe, warum die Schwingungsdauer des anharmonischen Pendels größer als die des harmonischen Pendels ist.
- b) Arbeite in einem Lehrbuch (z. B. VII.1 oder VII.2) die Herleitung der Schwingungsdauerformel eines anharmonischen mathematischen Pendels durch:
Gilt die Formel $T = T_0 \cdot k(\alpha)$ auch für das physische Pendel?
- c) Notiere die ersten vier Summanden der Reihe

$$k(\alpha) = 1 + \sum_{u=1}^n \left(\prod_{v=1}^u \frac{2v-1}{2v} \right)^2 \sin^{2u} \left(\frac{\alpha}{2} \right):$$

Welchen Fehler macht man für $k(20^\circ)$, wenn man nach dem zweiten Summanden abbricht?

4. Modellierung der Schwingungsbewegung

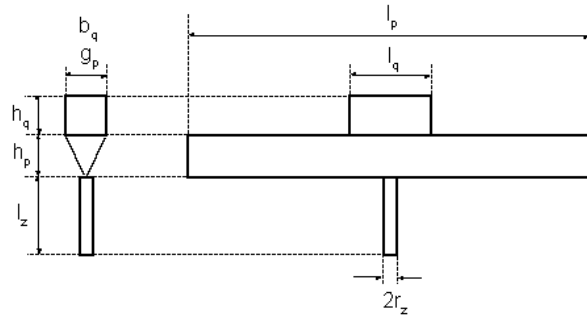
Mit einem Modellbildungssystem (z. B. VII.3) lassen sich Schwingungsbewegung in beliebigen Pendelmodellen simulieren. Kontrolliere bei den folgenden Aufgaben die Richtigkeit und Genauigkeit der Simulationen qualitativ und quantitativ durch Vergleich mit analytischen Lösungen und durch Variation des Iterationsverfahrens:

- a) Erstelle das Grundmodell eines realen Pendels (physisches Pendel mit geschwindigkeitsproportionaler Reibungskraft) für beliebige Auslenkungen: Untersuche die Abhängigkeit der Schwingungsdauer vom Auslenkwinkel und von der Dämpfung.
- b) Erweitere und spezifiziere das Modell aus a), um
 - die Abhängigkeit der Schwingungsdauer vom Breitengrad des Pendelstandortes zu untersuchen: Um welchen maximalen Betrag variiert die Schwingungsdauer?
 - die Abhängigkeit der Schwingungsdauer von der Raumtemperatur zu untersuchen.
 - den Kugelradius r_K zu bestimmen, bei dem die Schwingungsdauer im physikalischen Pendelmodell mit der im mathematischen übereinstimmt (vgl. II.1c).

II. Aufgaben zum Versuchsaufbau

1. Bestimmung der Erdbeschleunigung im mathematischen Pendelmodell

- a) Beim Pendel werde bei der g -Bestimmung sukzessive der zunächst vernachlässigte Draht und die vernachlässigte Aufhängung berücksichtigt: Nimmt der g -Wert zu oder ab?



- b) Die Aufhängung der Pendel (Abb. 2) besteht aus einem Quader (Index q), einem Prisma (Index p) und einem Zylinder (Index z). Berechne die Masse m_A sowie das Trägheitsmoment J_A und den Schwerpunktsabstand l_{SA} bezüglich der Drehachse (Kante des Prismas) aus den Daten der Aufhängung. Gib Formeln für das Trägheitsmoment J_D des Drahtes und das Trägheitsmoment J_K der Kugel bezüglich der Drehachse an.

Abb. 2: Daten der Aufhängung: $h_q = h_p = b_q = g_p = 10 \text{ mm}$, $l_z = l_q = 20 \text{ mm}$; $l_p = 100 \text{ mm}$, $r_z = 2 \text{ mm}$, $\rho_A = 7,85 \text{ g/cm}^3$, $m_q = 15,7 \text{ g}$, $m_z = 1,97 \text{ g}$, $J_z = 0,265 \cdot 10^{-6} \text{ kgm}^2$, $J_q = 3,794 \cdot 10^{-6} \text{ kgm}^2$.

- c) Schüler kennen nicht das physikalische Pendelmodell. Daher soll der Kugelradius r_K des Pendels so berechnet werden, dass die g -Bestimmung im physischen Pendelmodell ohne Auftrieb (g_p) zum gleichen Wert wie im mathematischen Pendelmodell (g_m) führt: Zeige, dass in einem Pendelmodell mit masseloser Aufhängung und masselosem Draht $g_m \neq g_p$ ist. Bestimme den Kugelradius r_K des Pendels für eine relative Abweichung $f(r_K) = \frac{g_m - g_p}{g_p} = 0$.

2. Auslenkmechanismus des Pendels

Um das Pendel mit einem Elektromagneten auf einen vom Experimentator gewünschten anfänglichen Auslenkwinkel zu bringen, muss die aktuelle horizontale Auslenkung a_K der Kugel des Pendels bekannt sein. Diese wird aus der Dunkelzeit t_D beim Durchgang des Kugelmittelpunkts durch den Laserstrahl der Lichtschranke ermittelt:

- a) Leite eine Formel zur Berechnung von a_K aus t_D her. Berechne Auslenkwinkel, Geschwindigkeit des Kugelmittelpunkts beim Nulldurchgang und die Dunkelzeit für $a_{K,\min} = 5 \text{ cm}$ und $a_{K,\max} = 50 \text{ cm}$.
- b) Nähere die Formel so, dass $a_K \sim 1/t_D$ wird und überprüfe, ob die Abweichung kleiner als 5 mm ist.

3. Funktionsweise der Lichtschranke des Pendels

Abb. 3 zeigt das Schaltbild der Lichtschranke:

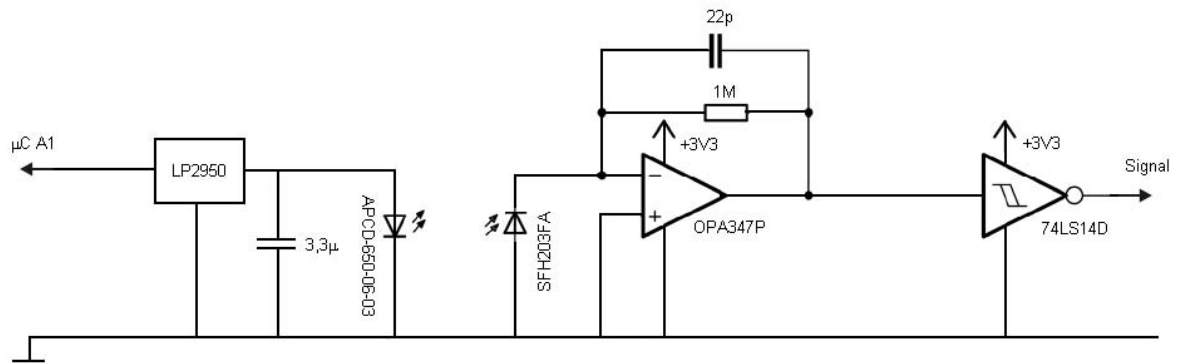


Abb. 3: Schaltbild der Lichtschranke.

- a) Identifiziere die Schaltungsgruppen und beschreibe möglichst detailliert die Funktion der Schaltungsgruppen. Informationen zu Bauelementen siehe VII.4

III. Aufgaben zur Versuchsdurchführung und Versuchsauswertung

1. Genaue Bestimmung der Erdbeschleunigung

Ein Physiklernender hat die Idee, die Erdbeschleunigung g mit einem Pendel zu messen. Dazu bringt er bei einer Raumtemperatur von 20 °C mit Hilfe eines Taschenmaßbandes ($\Delta l = \pm 0,9\text{ mm}$) im Abstand von 1 m von der Kugeloberfläche der Kugel (Radius 2 cm , Dichte $7,85\text{ g/cm}^3$) eine Markierung am Draht (Durchmesser $0,4\text{ mm}$, Dichte $7,95\text{ g/cm}^3$, Temperaturausdehnungskoeffizient $1,7 \cdot 10^{-5}/\text{°C}$, Elastizitätsmodul $1,7 \cdot 10^{11}\text{ N/m}^2$) des noch nicht aufgehängten Pendels an.

Am nächsten Tag klemmt er den Draht an der Markierung zwischen zwei Backen ein. Mit der Handstoppuhr misst er bei einer Raumtemperatur von 25 °C und einem anfänglichen Auslenkwinkel von 20° für 20 Schwingungen eine Zeitdauer von $40,82\text{ s}$. Während der Messung nimmt die horizontale Auslenkung der Kugel um weniger als 1 mm ab:

- Bestimme g als Physikexperte. Quantifiziere mögliche Fehler/Abweichungen eines Physiklernenden bei der Messung/Bestimmung von g nach Betrag und Vorzeichen. Wie lassen diese sich minimieren/korrigieren?
- Nimm eine Bewertung der Fehler und Abweichungen im Hinblick auf eine Bestimmung der Erdbeschleunigung mit einer Genauigkeit von mindestens $0,005\text{ m/s}^2$ vor.

2. Längenänderung des Drahtes während der Pendelbewegung

- Leite unter der Annahme eines starren Drahtes eine Formel $v_S(\alpha, \alpha_0, g, l_S)$ zur Berechnung der Geschwindigkeit des Pendelschwerpunktes beim Passieren der Ruhelage her.
- Welche Kräfte können zu einer Längenänderung des elastischen Drahtes während der Pendelbewegung führen? Berechne unter der Annahme Kugelmasse $m_K \approx$ Pendelmasse m die Kräfte in Abhängigkeit von α mit den Parametern α_0 , m und g .
- Berechne die Längenänderung $\Delta l_D = l - l_D$, wobei l_D die Drahtlänge des hängenden und ruhenden Pendels ist. Stelle $\Delta l_D(\alpha)$ für $\alpha_0 = 10^\circ$ graphisch dar und erkläre das Ergebnis qualitativ.

IV. Lösungen zu I

1. Ursachen und Modelle der Breitengradabhängigkeit der Erdbeschleunigung

a) Die Breitengradabhängigkeit der Erdbeschleunigung hat zwei Ursachen:

Da die Erde keine Kugel, sondern näherungsweise ein abgeplatteter Rotationsellipsoid ist, ist die Gravitationsbeschleunigung entlang eines Längengrades nicht konstant. Die Gravitationsbeschleunigung nimmt mit zunehmendem Breitengrad zu.

Da die Erde um die Erdachse rotiert, wirkt auf jeden Körper im rotierenden Bezugssystem außer der Gravitationskraft bzw. -beschleunigung die Zentrifugalkraft als Trägheitskraft bzw. die Zentrifugalbeschleunigung als Trägheitsbeschleunigung. Diese hängen vom Abstand des Körpers von der Erddrehachse ab und nehmen daher von einem Maximalwert am Äquator mit zunehmendem Breitengrad bis auf Null an den Polen ab. Beide Ursachen wirken in die gleiche Richtung, so dass die Erdbeschleunigung am Äquator kleiner als die an den Polen ist.

b) Aufgrund der kugelsymmetrischen Massenverteilung hängen a_G und V nur von der Position auf einer durch den Kugelmittelpunkt gehenden r -Achse ab. Durch Integration über Massenelemente (vgl. VII.2, S. 71 - 73) oder mit dem Satz von Gauß erhält man a_G . V ergibt sich durch Integration von a_G mit den Randbedingungen $V(\infty) = 0$ und der Stetigkeit von V bei $r = r_P$:

$$a_G(r) = \begin{cases} \frac{Gm_E}{r^2} & \text{für } r < -r_P \\ -\frac{Gm_E}{r_P^3} r & \text{für } |r| \leq r_P \\ -\frac{Gm_E}{r^2} & \text{für } r > r_P \end{cases} \quad V(r) = \begin{cases} -\frac{Gm_E}{2r_P^3} (r^2 - 3r_P^2) & \text{für } |r| \leq r_P \\ -\frac{Gm_E}{r} & \text{für } |r| > r_P \end{cases}$$

Es ist $a_G(r_P) = -9,857 \text{ m/s}^2$ und $V(r_P) = -6,266 \cdot 10^7 \text{ J/kg}$.

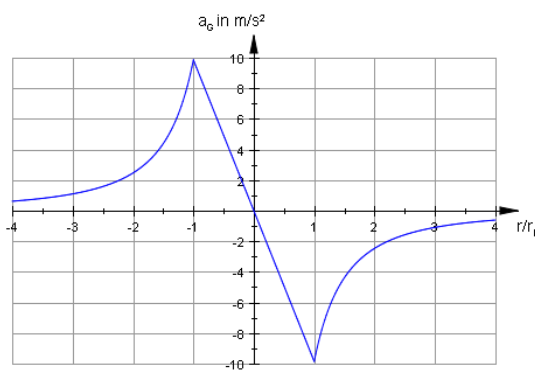


Abb. 4: Gravitationsfeldstärke der Erde.

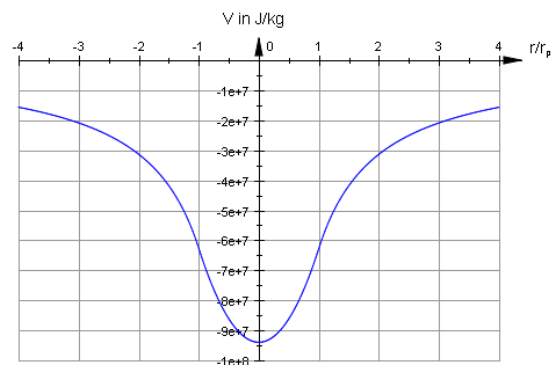


Abb. 5: Gravitationspotential der Erde.

Aufgrund der kugelsymmetrischen Massenverteilung zeigt die Gravitationsbeschleunigung in jedem Raumpunkt zum Kugelmittelpunkt. Eine Breitengradabhängigkeit liegt nicht vor.

c) Die Masse M ersetzt nach Newton die Gravitationswirkung der Erdkugel mit Radius $r = r_P$. Die Massen m_1 und m_2 sollen die Gravitationswirkung der Wülste ersetzen. Da die Wülste gleich sind, muss $m_1 = m_2 = m$ sein. Das Ellipsoidvolumen $V_{\text{Ellipsoid}}$,

das Volumen V_{Kugel} der Kugel mit Radius r_P und das Volumen V_{Wulst} eines Wulstes betragen

$$V_{\text{Ellipsoid}} = \frac{4}{3} \pi r_{\text{Ä}}^2 r_P = 1,08324 \cdot 10^{21} \text{ m}^3$$

$$V_{\text{Kugel}} = \frac{4}{3} \pi r_P^3 = 1,07598 \cdot 10^{21} \text{ m}^3$$

$$V_{\text{Wulst}} = \frac{1}{2} (V_{\text{Ellipsoid}} - V_{\text{Kugel}}) = 3,62993 \cdot 10^{18} \text{ m}^3$$

Mit der Erddichte $\rho_E = m_E/V_{\text{Ellipsoid}} = 5514,58 \text{ kg/m}^3$ erhält man die Massen $M = 5,93358 \cdot 10^{24} \text{ kg}$ und $m = 2,00175 \cdot 10^{19} \text{ kg}$.

$$|a_{G,\text{Ä}}| = G \left(\frac{M}{r_{\text{Ä}}^2} + \frac{m}{(r_{\text{Ä}} - r_P)^2} + \frac{m}{(r_{\text{Ä}} + r_P)^2} \right) = 12,64 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$|a_{G,P}| = G \left(\frac{M}{r_P^2} + \sqrt{2} \frac{m}{(\sqrt{2}r_P)^2} \right) = \frac{G}{r_P^2} \left(M + \frac{m}{\sqrt{2}} \right) = 9,79 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Die Beschleunigungsrichtungen zeigen zur Punktmasse M . Die Potentiale ergeben sich durch Summation der Einzelpotentiale:

$$V_{\text{Ä}} = -G \left(\frac{M}{r_{\text{Ä}}} + \frac{m}{(r_{\text{Ä}} - r_P)} + \frac{m}{(r_{\text{Ä}} + r_P)} \right) = -6,234 \cdot 10^7 \frac{\text{J}}{\text{kg}}$$

$$V_P = -G \left(\frac{M}{r_P} + \frac{m}{\sqrt{2}r_P} + \frac{m}{\sqrt{2}r_P} \right) = -\frac{G}{r_P} (M + \sqrt{2}m) = -6,227 \cdot 10^7 \frac{\text{J}}{\text{kg}}$$

- d) Das Modell liefert wegen der Rotationssymmetrie um die Erdachse in Übereinstimmung mit dem Experiment einen konstanten a_G -Wert entlang eines Breitenkreises. Nach c) ist $a_{G,\text{Ä}} > a_{G,P}$ im Widerspruch zu den experimentellen Daten aus zwei Gründen: Der Abstand der Massen m von der Masse M ist willkürlich gewählt. Der Wert $a_{G,\text{Ä}}$ ist zu groß, weil die Erddichte nicht konstant ist. Die Erdkrustendichte von ca. $2 - 3 \text{ g/cm}^3$ beträgt nur etwa die Hälfte der mittleren Erddichte von $5,5 \text{ g/cm}^3$. Daher wurde die Masse und Gravitationswirkung der Wülste zu groß berechnet.

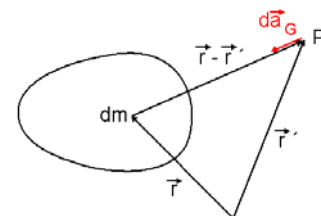


Abb. 6: Bestimmung der Gravitationsbeschleunigung.

Man zerlegt den Körper wie in Abb. 6 in infinitesimale Masselemente $dm = \rho(\vec{r})dV$ und summiert die Beiträge

$$d\vec{a}_G = G \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dm$$

vektoriell im Punkt P zu

$$\vec{a}_G = G \int_V \frac{\rho(\vec{r})(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV$$

auf. Ein weiterer Weg ist die Summation der Potentiale mit anschließender Gradientenbildung.

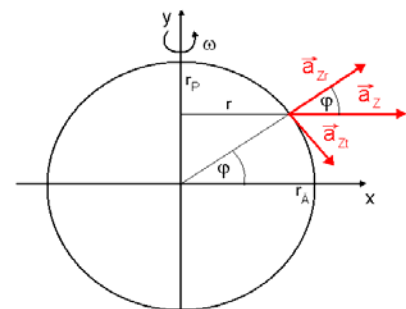


Abb. 7: Skizze zur Berechnung von a_{zr} für kugelförmige Erde.

- e) Die Richtung der Zentrifugalbeschleunigung a_z ist immer axial bzw. senkrecht zur Drehachse (Abb. 7). Nur der Anteil a_{zr} in Gegenrichtung zur Gravitationsbeschleunigung trägt zur Erdbeschleunigung bei:

$$a_{zr} = \omega^2 r \cos \varphi = \omega^2 r_{\ddot{A}} \cos^2 \varphi$$

Der Maximalwert $\omega^2 r_{\ddot{A}} = 0,0337 \text{ m/s}^2$ wird am Äquator erreicht, an den Polen ist wegen $r = 0$ auch $a_{zr} = 0$ (Abb. 8).

Für Schwerelosigkeit muss $a_{zr} = g$ sein. Damit erhält man:

$$\begin{aligned} \omega^2 &= \frac{g}{r_{\ddot{A}} \cos^2 \varphi} \Leftrightarrow T = 2\pi \sqrt{\frac{r_{\ddot{A}} \cos^2 \varphi}{g}} \\ &= 3256 \text{ s} = 54 \text{ min } 16 \text{ s} \approx 1 \text{ h} \end{aligned}$$

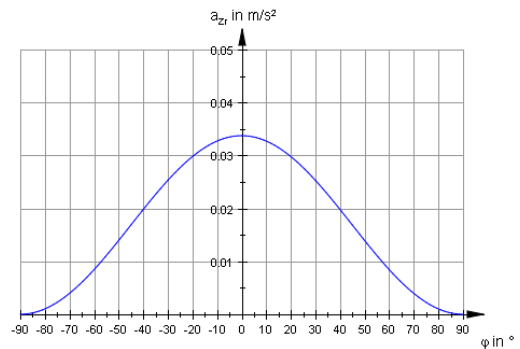


Abb. 8: $a_{zr}(\varphi)$ für kugelförmige Erde.

- f) Im Vergleich zum Modell aus a) verändert sich der Abstand r eines Punktes von der Rotationsachse der Erde (Abb. 9). Dieser kann aus der Funktionsgleichung einer Ellipse mit den Halbachsen a und b berechnet werden:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{r^2}{r_{\ddot{A}}^2} + \frac{r^2 \tan^2 \varphi}{r_p^2} = 1 \Leftrightarrow r(\varphi) = \frac{r_p}{\sqrt{\left(\frac{r_p}{r_{\ddot{A}}}\right)^2 + \tan^2 \varphi}} \Leftrightarrow \left(\frac{r_{\ddot{A}}}{r}\right)^2 = 1 + \left(\frac{r_{\ddot{A}}}{r_p}\right)^2 \tan^2 \varphi$$

Unter der Annahme, dass die Gravitationsbeschleunigung des Erdellipsoids zum Mittelpunkt M des Ellipsoids zeigt, lässt sich a_{zr} berechnen. Allerdings stehen jetzt radiale und tangentielle Komponente der Zentrifugalbeschleunigung a_z nicht mehr senkrecht aufeinander. Den Winkel α erhält man aus der Steigung der Ellipse:

$$y'(x) = \frac{d}{dx} \left(b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \right) = -\frac{b}{a^2} \frac{x}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}} = \tan \alpha$$

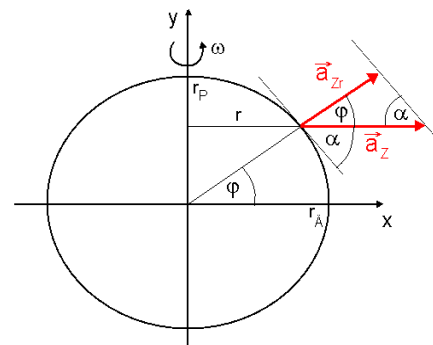


Abb. 9: Skizze zur Berechnung von a_{zr} für eine ellipsoidförmige Erde.

Anwendung auf unseren Fall und Einsetzen von $r(\varphi)$ liefert:

$$-\frac{r_p}{r_{\ddot{A}}} \frac{r}{\sqrt{1 - \frac{r^2}{r_{\ddot{A}}^2}}} = -\frac{r_p}{r_{\ddot{A}}} \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{r_{\ddot{A}}}{r}\right)^2 - 1}} = -\frac{r_p^2}{r_{\ddot{A}}^2 \tan \varphi} = \tan \alpha \Leftrightarrow \alpha(\varphi) = \arctan \left(\frac{r_p^2}{r_{\ddot{A}}^2 \tan \varphi} \right)$$

Nach Abb. 9 erhält man im Dreieck mit den Innenwinkeln φ und α :

$$\begin{aligned} \frac{a_{zr}}{\sin \alpha} &= \frac{a_z}{\sin[180 - (\alpha + \varphi)]} \\ \Rightarrow a_{zr}(\varphi) &= \omega^2 r(\varphi) \frac{\sin \alpha(\varphi)}{\sin[\alpha(\varphi) + \varphi]} \end{aligned}$$

Die Differenz $\Delta a_{Zr}(\varphi) = a_{Zr}(\text{kugelförmige Erde}) - a_{Zr}(\text{ellipsoidförmige Erde})$ ist in Abb. 10 dargestellt. Für die Pole ist diese wegen $r = 0$ und für den Äquator wegen $r = r_P$ bei der kugelförmigen Erde Null. Da $\Delta a_{Zr} < 0,0001 \text{ m/s}^2$ ist der Einfluss der Erdabplattung auf die Zentrifugalbeschleunigung im Vergleich zu dem auf die Gravitationsbeschleunigung von ca. $0,02 \text{ m/s}^2$ vernachlässigbar.

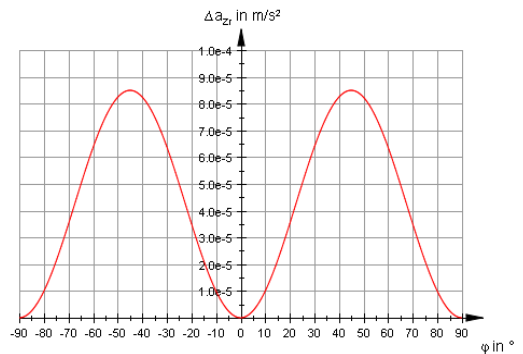


Abb. 10: Skizze zur Berechnung von a_{Zr} für eine ellipsoidförmige Erde.

2. Bestimmung der Erdbeschleunigung in verschiedenen Pendelmodellen

a)

Formel	Erläuterung
$M_R = F_R l_S = c v_S l_S = c \dot{\alpha} l_S^2$	<ul style="list-style-type: none"> Reibungskraft F_R steht senkrecht auf dem Hebelarm l_S Annahme, dass Reibungskraft F_R proportional zur Schwerpunktgeschwindigkeit v_S ist (Stokesche Reibungskraft), weil mathematisch am einfachsten und dies zur Beschreibung der Pendelbewegung ausreicht Umrechnung der Schwerpunktgeschwindigkeit v_S in Winkelgeschwindigkeit ω
$J \ddot{\alpha} = M = -(m - \rho_L V) g l_S \alpha - c \dot{\alpha} l_S^2$ $\ddot{\alpha} + \frac{c l_S^2}{J} \dot{\alpha} + \frac{(m - \rho_L V) g l_S}{J} \alpha = 0$ $\ddot{\alpha} + 2\delta \dot{\alpha} + \omega^2 \alpha = 0$	<ul style="list-style-type: none"> Ansatz mit Newtonschen Grundgesetz der Mechanik für Drehbewegungen Näherung $\sin \alpha \approx \alpha$ für kleine Winkel α im Bogenmaß Homogene lineare Differentialgleichung (DGL) zweiter Ordnung
$\alpha(t) = k e^{\lambda t}$ $\lambda^2 + 2\delta \lambda + \omega_0^2 = 0$ $\lambda_{1/2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} = -\delta \pm i \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$ $= -\delta \pm i \omega$ $\alpha(t) = C_1 e^{-\delta t} \sin(\omega t) + C_2 e^{-\delta t} \cos(\omega t)$ $= e^{-\delta t} [C_1 \sin(\omega t) + C_2 \cos(\omega t)]$	<ul style="list-style-type: none"> Einsetzen des Lösungsansatzes mit Exponentialfunktion in DGL liefert charakteristisches Polynom Konjugiert komplexe Nullstellen des charakteristischen Polynoms für den interessierten Schwingfall ($\delta < \omega$) Allgemeine Lösung der DGL ist Linearkombination der den Nullstellen zugeordneten Fundamentallösungen Kreisfrequenz ω (Schwingungsdauer T) des gedämpften Pendels ist kleiner (größer) als die Kreisfrequenz ω_0 (Schwingungsdauer T_0) des ungedämpften Pendels

$\alpha(0) = \alpha_0 \quad \dot{\alpha}(0) = 0$ $\alpha(0) = C_2 = \alpha_0$ $\dot{\alpha}(t) = -\delta e^{-\delta t} [C_1 \sin(\omega t) + \alpha_0 \cos(\omega t)]$ $+ e^{-\delta t} [C_1 \omega \cos(\omega t) - \alpha_0 \omega \sin(\omega t)]$ $\dot{\alpha}(0) = -\delta \alpha_0 + C_1 \omega = 0 \Leftrightarrow C_1 = \alpha_0 \frac{\delta}{\omega}$ $\alpha(t) = \alpha_0 e^{-\delta t} \left[\frac{\delta}{\omega} \sin(\omega t) + \cos(\omega t) \right]$ $= \alpha_0 \sqrt{\left(\frac{\delta}{\omega}\right)^2 + 1} \cdot e^{-\delta t} \sin\left[\left(\omega t\right) + \arctan\left(\frac{\omega}{\delta}\right)\right]$	<ul style="list-style-type: none"> • Konstanten C_1 und C_2 werden für die Anfangsbedingungen berechnet, dass Pendel zum Zeitpunkt $t = 0$ mit dem Auslenkwinkel $\alpha = \alpha_0$ und der Winkelgeschwindigkeit $\dot{\alpha} = 0$ losgelassen wird • Einsetzen der Konstanten ergibt Lösung der DGL für diese Anfangsbedingungen • Die Summation trigonometrischer Funktionen mit gleicher Kreisfrequenz ergibt phasenverschobene trigonometrische Funktion
$\alpha(t) \approx \alpha_0 e^{-\delta t} \cos(\omega t)$	<ul style="list-style-type: none"> • Die Dämpfung des Pendels ist sehr klein, so dass $\delta \ll \omega$ bzw. $\delta/\omega \ll 1$ ist und der Sinus-Term gegenüber dem Cosinus-Term vernachlässigt werden kann

b) Aus der Formel für die Schwingungsdauer T erhält man:

$$g_r = \frac{\left(\frac{4\pi^2}{T^2} + \delta^2\right) \cdot J}{(m - \rho_L V) \cdot l_S}$$

Die Größen m , V und J müssen berechnet bzw. gemessen werden, $\rho_L = 1,3 \text{ kg/m}^3$ ist bekannt, T wird direkt gemessen, die Dämpfungskonstante wird indirekt aus den Ausschlagwinkeln zu den Zeitpunkten t_1 und t_2 bestimmt.

$$\delta = \frac{\ln\left(\frac{\alpha(t_1)}{\alpha(t_2)}\right)}{t_2 - t_1}$$

c) Für ein physisches Pendel ohne Reibung ist $\delta = 0$ und für fehlenden Auftrieb muss $\rho_L = 0$ sein:

$$g_p = \frac{4\pi^2 J}{T^2 m l_S}$$

Für ein mathematisches Pendel ist $l_S = l_{SK}$ und $J = m l_{SK}^2$:

$$g_m = \frac{4\pi^2 l_{SK}}{T^2}$$

Es ist

$$g_r = \frac{\left(\frac{4\pi^2}{T^2} + \delta^2\right) J}{(m - \rho_L V) l_S} > \frac{4\pi^2 J}{T^2 (m - \rho_L V) l_S} = g_p$$

Mit g_m kann keine generelle Größer-kleiner-Beziehung hergestellt werden, da die Zusammenhänge zwischen l_S , J und l_{SK} von der konkreten Gestalt des Pendels abhängen.

3. Anharmonisches Pendel

- a) Die Rückstellkraft F_r ist nicht zur Auslenkung proportional.

$$f = \frac{\Delta F_r}{F_r} = \frac{mg\alpha - mg\sin\alpha}{mg\sin\alpha} = \frac{\alpha}{\sin\alpha} - 1 < 0,01 \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\sin\alpha} < 1,01$$

Durch Probieren erhält man $\alpha < 14^\circ$. Die wahre Rückstellkraft ist kleiner als die genäherte Rückstellkraft, so dass sich eine geringere Bahnbeschleunigung und damit eine größere Schwingungsdauer ergibt.

- b) Ja, weil die Struktur der Differentialgleichung für das mathematische und physikalische die gleiche ist.
 c) Aufschreiben der Reihe bis $n = 3$:

$$\begin{aligned} k(\alpha) &= 1 + \sum_{u=1}^n \left(\prod_{v=1}^u \frac{2v-1}{2v} \right)^2 \sin^{2u} \left(\frac{\alpha}{2} \right) \\ &= 1 + \left(\frac{1}{2} \right)^2 \sin^2 \left(\frac{\alpha}{2} \right) + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \right)^2 \sin^4 \left(\frac{\alpha}{2} \right) + \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \right)^2 \sin^6 \left(\frac{\alpha}{2} \right) + \dots \\ &= 1 + \frac{1}{4} \sin^2 \left(\frac{\alpha}{2} \right) + \frac{9}{64} \sin^4 \left(\frac{\alpha}{2} \right) + \frac{225}{2304} \sin^6 \left(\frac{\alpha}{2} \right) + \dots \end{aligned}$$

Es ist

$$1 + \frac{1}{4} \sin^2 \left(\frac{20^\circ}{2} \right) = 1,007538 \quad \text{und} \quad T = T_0 \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\Phi}{\sqrt{1 - \sin^2 \left(\frac{\alpha}{2} \right) \sin^2 \Phi}} = T_0 \cdot k(\alpha).$$

Beim Integral handelt es sich um ein elliptisches Integral der Form

$$F(c, \vartheta) = \int_0^{\vartheta} \frac{d\Phi}{\sqrt{1 - c^2 \sin^2 \Phi}}.$$

mit $c = \sin^2(\alpha/2)$, $\vartheta = \pi/2$. Tabellenwerke (z. B. VII.5) liefern für $\alpha = 20^\circ$ $F(\sin 10^\circ, \pi/2) = 1,5828$ und damit $k(20^\circ) = 2 \cdot 1,5828 / \pi = 1,007641$ und damit einen Abweichung von 0,01 %.

4. Modellierung der Schwingungsbewegung

- a) Abb. 11 zeigt das Modell mit den Parametern $J = 5 \text{ kgm}^2$, $m = 2 \text{ kg}$, $l_s = 1 \text{ m}$, $g = 9,81 \text{ m/s}^2$. Eine größere Dämpfung (größerer Parameter c) und größerer anfänglicher Auslenkwinkel α_0 vergrößern die Schwingungsdauer T (Abb. 12 und Abb. 13).

- b) Durch Erweiterung des Wirkungsgefüges (Abb. 14) um die WELMEC-Formel kann g in Abhängigkeit von φ und h variiert werden. Größeres φ und h führen zu größerem g und

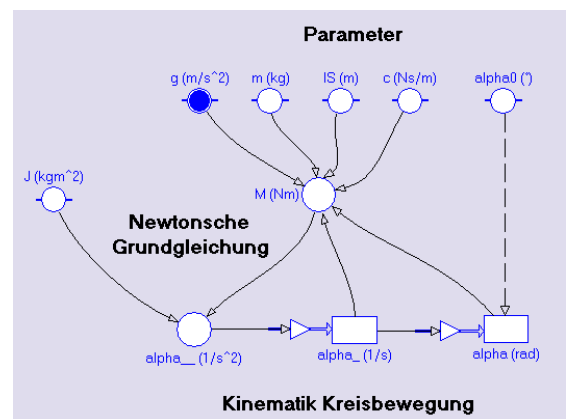


Abb. 11: Wirkungsgefüge für reales Pendel.

zu einer kleineren Schwingungsdauer. Durch Ausgabe in eine Tabelle erhält man für $h = 0$ die Schwingungsdauern $T(0^\circ) = 3,3957$ s und $T(90^\circ) = 3,3868$ s, also $\Delta T = 0,0089$ s ≈ 10 ms. Man braucht also eine elektronische Zeitmessung.

Die Erweiterung des Modells um die Formel für eine temperaturabhängige Längenänderung eines Drahts ergibt zum zunehmender Temperatur ϑ_D eine größere Drahtlänge l_D und damit eine größere Schwingungsdauer T des Pendels.

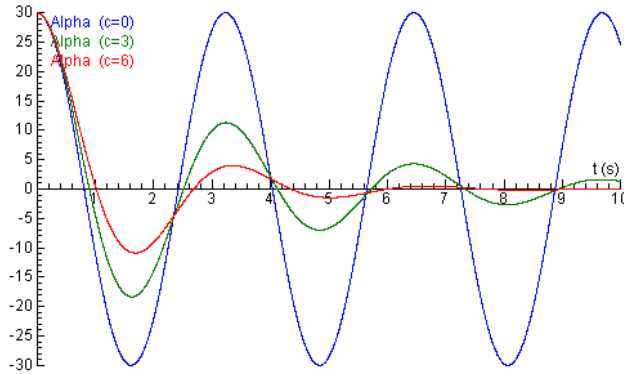


Abb. 12: Vergrößerung der Schwingungsdauer bei größerer Dämpfung (α in Grad).

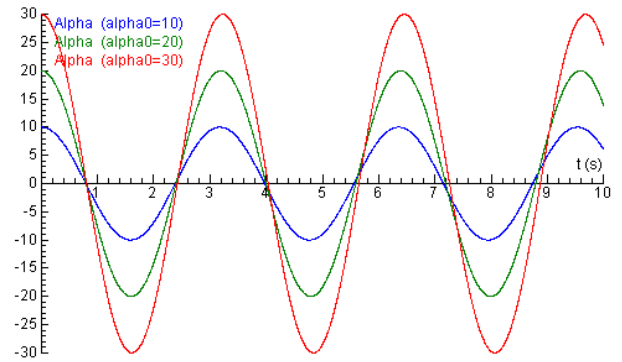


Abb. 13: Vergrößerung der Schwingungsdauer bei größerem Auslenkwinkel (α in Grad).

Mit der Größe Phys_Math kann zwischen dem physischen und dem mathematischen Pendelmodell gewählt werden. Dadurch werden während der Simulation die entsprechenden Formeln für das Trägheitsmoment J und das Drehmoment M verwendet. Für $r_K \approx 4,5$ cm stimmt die Schwingungsdauer im mathematischen und physischen Pendelmodell überein (vgl. II.1c). Umgekehrt liefert dann die gemessene gleiche Schwingungsdauer im mathematischen und physischen Pendelmodell den gleichen g -Wert.

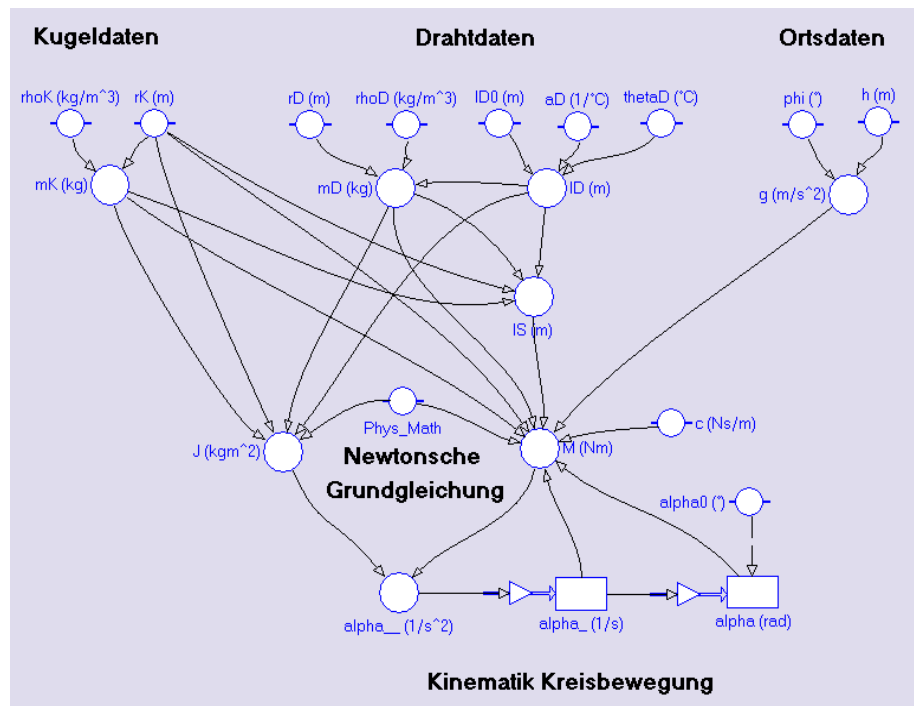


Abb. 14: Erweitertes Wirkungsgefüge zur Untersuchung des Welpendels.

V. Lösungen zu II

1. Bestimmung der Erdbeschleunigung im mathematischen Pendelmodell

- a) Der Schwerpunkt S des Pendels wandert nach oben, d. h. l_s wird kleiner. Das Trägheitsmoment J und die Masse m des Pendels werden größer. Nach

$$g_p = \frac{4\pi^2 J}{T^2 m l_s}$$

kann daher nicht entschieden werden, ob der g -Wert größer oder kleiner wird.

- b) Die Daten des Prismas müssen für die Daten der gesamten Aufhängung berechnet werden:

	Abmessungen	Masse für $\rho = 7,850 \text{ g/cm}^3$	Trägheitsmoment	Abstand Schwerpunkt- Drehpunkt
Röhrchen (Zylinder)	$r_z = 2 \text{ mm}$ $l_z = 20 \text{ mm}$	$m_z = \rho \pi r_z^2 l_z$ $= 1,97 \text{ g}$	$J_z = \frac{1}{12} m_z (l_z^2 + 3r_z^2) + m_z \frac{1}{4} l_z^2$ $= 0,265 \cdot 10^{-6} \text{ kgm}^2$	$l_{sz} = \frac{l_z}{2}$ $= +10,00 \text{ mm}$
Schneide (Prisma)	$g_p = 10 \text{ mm}$ $h_p = 10 \text{ mm}$ $l_p = 100 \text{ mm}$	$m_p = \rho \frac{g_p h_p}{2} l_p$ $= 39,25 \text{ g}$	$J_p = \frac{1}{36} m_p [g_p^2 + 2(h_p^2 + \frac{1}{4} g_q^2)] + m_p \frac{4}{9} h_q^2$ $= 2,126 \cdot 10^{-6} \text{ kgm}^2$	$l_{sp} = -\frac{2}{3} h_p$ $= -6,67 \text{ mm}$
Klemme (Quader)	$b_q = 10 \text{ mm}$ $h_q = 10 \text{ mm}$ $l_q = 20 \text{ mm}$	$m_q = \rho b_q h_q l_q$ $= 15,70 \text{ g}$	$J_q = m_q \left[\frac{1}{12} b_q^2 + \frac{1}{12} h_q^2 + \left(\frac{h_q}{2} + h_p \right)^2 \right]$ $= 3,794 \cdot 10^{-6} \text{ kgm}^2$	$l_{sq} = -\frac{7}{6} h_q$ $= -11,67 \text{ mm}$
Aufhän- gung		$m_A = m_z + m_p + m_q$ $= 56,92 \text{ g}$	$J_A = J_z + J_p + J_q$ $= 6,185 \cdot 10^{-6} \text{ kgm}^2$	$l_s = \frac{m_z l_{sz} + m_p l_{sp} + m_q l_{sq}}{m_s}$ $= -7,47 \text{ mm}$

Formeln für das Trägheitsmoment einer Kugel und eines Zylinders für die Rotation um Schwerpunktsachsen finden sich z. B. in VII.2. Mit dem Satz von Steiner erhält man

$$J_D = \frac{1}{12} m_D l_D^2 + \frac{1}{4} m_D l_D^2 = \frac{1}{3} m_D l_D^2 = 0,0062479 \text{ kgm}^2$$

$$J_K = \frac{2}{5} m_K r_K^2 + m_K l_{SK}^2 = 18,5906 \text{ kgm}^2$$

- c) Es ist

$$g_p = \frac{4\pi^2 J}{T^2 m l_s} = \frac{4\pi^2 J_K}{T^2 m_K l_{SK}} = \frac{4\pi^2 (m_K l_{SK}^2 + \frac{2}{5} m_K r_K^2)}{T^2 m_K l_{SK}} = \frac{4\pi^2 l_{SK}}{T^2} + \frac{2}{5} \frac{r_K^2}{T^2 l_{SK}} = g_m + \frac{2}{5} \frac{r_K^2}{T^2 l_{SK}} > g_m$$

Formel	Erläuterung
$f = \frac{g_m - g_p}{g_p} = \frac{g_m}{g_p} - 1$	<ul style="list-style-type: none"> Formel für die relative Abweichung f von g_m bezogen auf g_p
$= \frac{4\pi^2 l_{SK} k^2}{T^2} \cdot \frac{T^2 m l_S}{4\pi^2 J k^2} - 1 = \frac{m l_{SK} l_S}{J} - 1$	<ul style="list-style-type: none"> Einsetzen der Formeln für g_m und g_p
$= \frac{l_{SK} (m_A l_{SA} + m_D l_{SD} + m_K l_{SK})}{J_A + J_D + J_K} - 1$	<ul style="list-style-type: none"> Formel zur Berechnung des Gesamtschwerpunktes aus Einzelschwerpunkten Gesamträgheitsmoment ist Summe der Einzelträgheitsmomente
$= \frac{l_{SK} (m_A l_{SA} + \frac{1}{2} m_D l_D + m_K l_{SK})}{J_A + \frac{1}{3} m_D l_D^2 + \frac{2}{5} m_K r_K^2 + m_K l_{SK}^2} - 1$	<ul style="list-style-type: none"> Einsetzen des bekannten Abstands zum Schwerpunkt des Drahts Einsetzen der Formeln für die Trägheitsmomente bezüglich des Drehpunkts
$= \frac{(l_D + r_K) [m_A l_{SA} + \frac{1}{2} \rho_D \pi r_D^2 l_D^2 + \frac{4}{3} \rho_K \pi r_K^3 (l_D + r_K)]}{J_A + \frac{1}{3} \rho_D \pi r_D^2 l_D^3 + \frac{8}{15} \rho_K \pi r_K^5 + \frac{4}{3} \rho_K \pi r_K^3 (l_D + r_K)^2} - 1$	<ul style="list-style-type: none"> Ersetzen der abhängigen Größen durch voneinander unabhängige Größen

Diese Gleichung kann nicht nach r_K aufgelöst werden. Lösung mit Graph der Funktion $f(r_K)$ nach Abb. 15. Die Nullstelle liegt bei $r_K \approx 4,4$ cm.

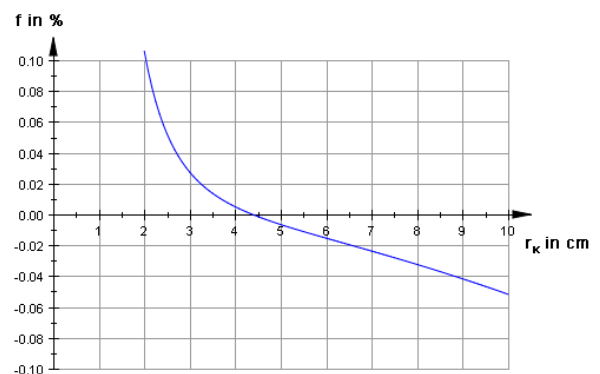


Abb. 15: Abhängigkeit der relativen Abweichung f bei der g -Bestimmung im mathematischen Pendelmodell vom Kugelradius r_K .

2. Auslenkmechanismus des Pendels

- a) Die horizontale Auslenkung a_K (Abb. 16) wird im physischen Pendelmodell aus der Dunkelzeit t_D mit dem Energieerhaltungssatzes (Umwandlung von Lageenergie in Rotationsenergie) berechnet:

$$E_{\text{pot}} = E_{\text{rot}} \Leftrightarrow mgh = \frac{1}{2} J \omega^2$$

Unter Beachtung, dass die Geschwindigkeit des Kugelmittelpunkts nicht mit der des Pendelschwerpunktes übereinstimmt, entnimmt man Abb. 15 mit Hilfe des Satzes von Pythagoras, dem Strahlensatz und der Umrechnung

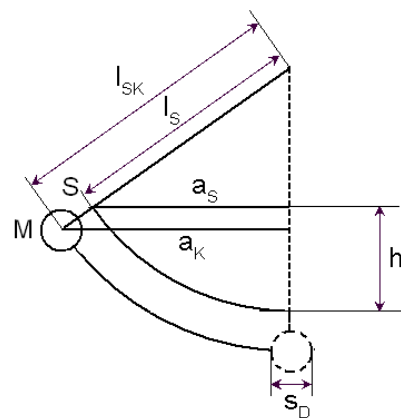


Abb. 16: Skizze zur Berechnung des Zusammenhangs zwischen der horizontalen Auslenkung a_K und der Dunkelzeit t_D .

zwischen Bahn- und Winkelgeschwindigkeit ω , dass

$$h = l_s - \sqrt{l_s^2 - a_s^2} \quad \frac{a_s}{a_k} = \frac{l_s}{l_{sk}} \quad \omega = \frac{l_s}{v_s} = \frac{l_{sk}}{v_k}.$$

Einsetzen der Formeln in den Energieansatz und Auflösen der Wurzelgleichung nach v_k ergibt:

$$v_k = \sqrt{\frac{2mgl_s^2}{J} \left(l_s - \sqrt{l_s^2 - a_k^2 \frac{l_s^2}{l_{sk}^2}} \right)} = \sqrt{\frac{2mgl_s^3}{J} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{a_k^2}{l_{sk}^2}} \right)}$$

Die näherungsweise Berechnung der Momentangeschwindigkeit v_k aus der Durchschnittsgeschwindigkeit ergibt $a_k(t_D)$:

$$v_k \approx \frac{s_D}{t_D} \quad a_k(t_D) = l_{sk} \sqrt{\frac{Js_D^2}{mgl_s^3 t_D^2} - \left(\frac{Js_D^2}{2mgl_s^3 t_D^2} \right)^2}$$

Mit $s_D = 2r_k$ und $\alpha = \arctan\left(\frac{a_k}{l_{sk}}\right)$ erhält man die folgende Tabelle:

Horizontale Anfangsauslenkung a	Auslenkwinkel α	Geschwindigkeit v_k	Dunkelzeit t_D
$a_{k,min} = 5 \text{ cm}$	$\alpha_{0,min} = 1,06^\circ$	$v_{k,min} = 9,3 \text{ cm/s}$	$t_{D,max} = 0,92 \text{ s}$
$a_{k,max} = 50 \text{ cm}$	$\alpha_{0,min} = 10,67^\circ$	$v_{k,max} = 95,8 \text{ cm/s}$	$t_{D,min} = 0,09 \text{ s}$

b) Mit $s_D = 2r_k$ und $e = \frac{4Jr_k^2}{mgl_s^3}$ erhält man

$$a_k(t_D) = l_{sk} \sqrt{\frac{e}{t_D^2} - \left(\frac{e}{2t_D^2} \right)^2} \approx l_{sk} \frac{\sqrt{e}}{t_D}.$$

Abb. 17 zeigt, dass die Abweichung Δa_k für $t_D \in [0,09 \text{ s}; 0,92 \text{ s}]$ kleiner als 2 mm ist.

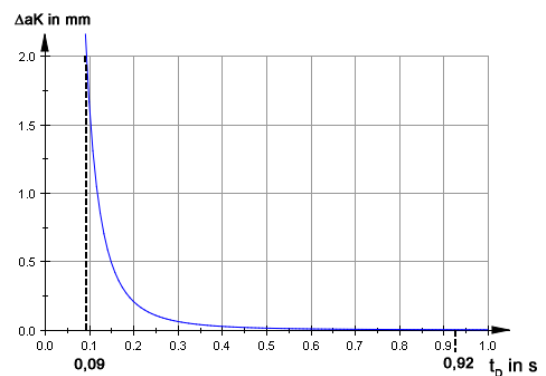


Abb. 17: Differenz Δa_k zwischen genäherter und ungenäherter Berechnung von $a_k(t_D)$.

3. Funktionsweise der Lichtschranke des Pendels

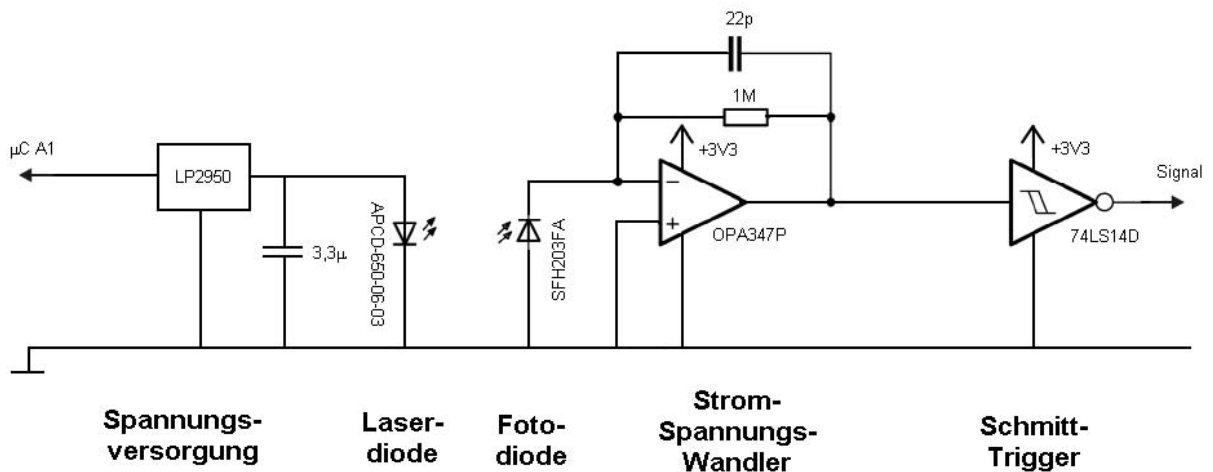


Abb. 18: Beschriftetes Schaltbild der Lichtschranke.

a) Abb. 18 zeigt die beschrifteten Schaltungsgruppen. Der optische Teil der Lichtschranke besteht aus einer mit stabilisierter Spannung versorgten Laserdiode und einer Fotodiode. Das Signal der Fotodiode wird mit einem Operationsverstärker verstärkt und mit einem Schmitt-Trigger impulsgeformt.

- Die Laserdiode APCD-650 kann vom Mikrocontroller μC im Interface über den Ausgang A1 (5 V oder 0 V) ein- oder ausgeschaltet werden. Der Spannungsregler LP2950 passt die Spannung von 5 V an die Betriebsspannung der Laserdiode von 3,3 V an.
- Das Licht der Laserdiode trifft auf die Silizium-PIN-Fotodiode SFH203FA. Als PIN-Diode mit einer intrinsischen, eigenleitenden Schicht zwischen p-dotierter und n-dotierte Schicht, hat diese eine geringe Sperrschichtkapazität und damit eine kurze Schaltzeit. Obwohl das Maximum der Lichtempfindlichkeit bei 800 nm im Infraroten liegt, wurde wegen der Sichtbarkeit des Laserstrahls eine Laserdiode mit 650 nm Wellenlänge verwendet.
- Die Fotodiode liefert einen kleinen lichtintensitätsabhängigen Kurzschlussstrom I_K , der mit dem als Strom-Spannungswandler betriebenen Operationsverstärker OPA347P in eine zum Kurzschlussstrom proportionale Ausgangsspannung $U_A = -1 \text{ M}\Omega \cdot I_K$ umgewandelt wird. Der Kondensator von 22 pF reduziert Overshots und filtert 50 Hz - Netzspannungsstör-signale heraus.

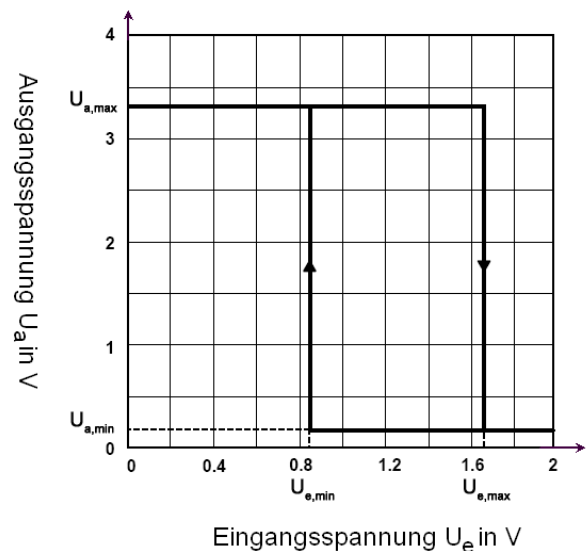


Abb. 19: Übertragungsfunktion des Schmitt-Triggers.

- Der nachgeschaltete invertierende Schmitt-Trigger 74LS14D dient der Impulsformung für die nachgeschaltete digitale Elektronik, der Erzeugung eines möglichst rauscharmen Signals und damit der Erhöhung der Messgenauigkeit der Zeitmessung. Anhand der Übertragungsfunktion (Abb. 19) wird das verständlich: Fällt die Eingangsspannung U_e unter $U_{e,min} = 0,85 \text{ V}$, dann steigt die Ausgangsspannung U_a schlagartig von $U_{a,min} = 0,2 \text{ V}$ auf $U_{a,max} = 3,3 \text{ V}$. Steigt die Eingangsspannung U_e über $U_{e,max} = 1,65 \text{ V}$, dann fällt die Ausgangsspannung U_a schlagartig von $U_{a,max} = 3,3 \text{ V}$ auf $U_{a,min} = 0,2 \text{ V}$. Bei beleuchteter Fozelle ist $U_a = U_{a,max}$, ansonsten $U_a = U_{a,min}$.

Zusatzinformationen: Verfahren und Genauigkeit der Zeitmessung

Das Ausgangssignal des Schmitt-Triggers wird einem Mikrocontroller ATmega88 zur Messung der Dunkelzeit der Kugel und der Schwingungsdauer T des Pendels zugeführt. Dieser wird von einem temperaturstabilisierten Quarzoszillator FOX924 mit $f = 10 \text{ MHz} \pm 2,5 \text{ ppm} = 10^7 \text{ Hz} \pm 0,00025 \% = 10^7 \text{ Hz} \pm 25 \text{ Hz}$ und damit hoher Frequenzgenauigkeit getaktet.

Gemessen wird die halbe Schwingungsdauer T dadurch, dass die Anzahl der Schwingungen des Quarzes zwischen der Unterbrechung des Laserstrahls (Hell-Dunkel-Übergang) und dem übernächsten Austritt der Kugel aus dem Laserstrahl (Dunkel-Hell-Übergang) gemessen wird. Die Frequenzgenauigkeit führt bei einer zu messenden Schwingungsdauer T des Pendels von $\approx 3,3 \text{ s}$ zu einem Fehler $\Delta T = \pm 2,5 \cdot 10^{-6} \cdot 3,3 \text{ s} = \pm 8,25 \cdot 10^{-6} \text{ s} = \pm 8,25 \text{ } \mu\text{s}$. Die Daten werden mit einem I2C-Bus zum Mikrocontroller im Interface übertragen.

Messungen der Schwingungsdauer des Pendels ergeben allerdings Schwankungen der Schwingungsdauer in der 4. Nachkommastelle von $\pm 0,1 \text{ ms}$. Ursachen sind:

- Durch den Ablösevorgang vom Elektromagneten hervorgerufene Schwingungen um den Befestigungspunkt des Drahtes an der Kugel (Wobbelbewegungen)
- Auf- und Abbewegungen der Kugel aufgrund des elastischen Drahtes
- Reflexions- und Beugungseffekte des Laserstrahls an der Kugeloberfläche

Der Gesamtfehler der Zeitmessung beträgt somit $0,1 \text{ ms}$.

VI. Lösungen zu III

1. Genaue Bestimmung der Erdbeschleunigung

- a) Der Physikexperte verwendet für eine möglichst genaue g-Bestimmung das reale Pendelmodell. Da die Abnahme der Amplitude nicht genau bekannt und sehr klein ist, wird das physische anharmonische Pendelmodell mit Auftrieb verwendet:

$$g_p = \frac{4\pi^2 J}{T^2(m - \rho_L V)l_S} \cdot k^2$$

- b) $m = m_D + m_K = (1,0 + 263,1) \text{ g} = 264,1 \text{ g}$
 $V = V_D + V_K = (1,26 \cdot 10^{-7} + 3,35 \cdot 10^{-5}) \text{ m}^3 = 3,3626 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3$
 $J = J_D + J_K = (3,33 \cdot 10^{-4} + 0,2737) \text{ kgm}^2 = 0,274 \text{ kgm}^2$
 $l_D(25 \text{ }^\circ\text{C}) = 1,00009 \text{ m}$
 $l_S = 1,01803 \text{ m}$
 $l_{SK} = l_D + r_K = 1,02 \text{ m}$
 $k(20^\circ) = 1,0077$
 $T = 40,82 \text{ s}/20 = 2,041 \text{ s}$

Damit erhält man $g_p = 9,8094 \text{ m/s}^2$. In der nachfolgenden Tabelle ist für jede fehlerbehaftete Größe G mit obiger Formel durch Einsetzen des fehlerhaften Werts (der fehlerhaften Werte) der oder die fehlerhafte(n) g-Wert(e) ermittelt worden. Dann wurde die Differenz Δg zu $g_p = 9,8094 \text{ m/s}^2$ ermittelt.

Ursache des Fehlers	Bestimmung von Δg	Fehler-Minimierung
Statistischer Fehler der Drahtlängenmessung	$\Delta l = \pm 0,9 \text{ mm}$ $g_{\min} = 9,8007 \text{ m/s}^2$; $g_{\max} = 9,8181 \text{ m/s}^2$ $\Delta g = \pm 0,0087 \text{ m/s}^2$	Besseres Messmittel (z. B. die Messapparatur)
Statistischer Fehler der Schwingungsdauermessung	$\Delta t \approx \pm 0,2 \text{ s}$ (Reaktionszeit) $T_{\max} = 2,051 \text{ s}$; $T_{\min} = 2,031 \text{ s}$; $g_{\min} = 9,7140 \text{ m/s}^2$; $g_{\max} = 9,9062 \text{ m/s}^2$ $\Delta g = \pm 0,0961 \text{ m/s}^2$	Besseres Messmittel (z. B. Lichtschranke)
Temperaturabhängigkeit der Drahtlänge	$\Delta l_S \approx 0$, da $l_S(20^\circ) \approx l_S(25^\circ) = 1,01803 \text{ m}$ $g = 9,8094 \text{ m/s}^2$ $\Delta g \approx 0 \text{ m/s}^2$	Korrektur mit Formel
Drahtverlängerung durch hängendes Pendel	Berechnung von $\Delta l_D \approx \Delta l_S$ nach $\sigma_D = \epsilon E_D \Leftrightarrow \frac{m_K g}{A_D} = \frac{\Delta l_D}{l_D} E_D \Leftrightarrow \Delta l_D = l_D \frac{m_K g}{E_D A_D} = 0,12 \text{ mm}$ $g = 9,9860 \text{ m/s}^2$ $\Delta g = +0,1766 \text{ m/s}^2$	Längenmessung bei hängendem Pendel oder rechnerische Korrektur
Abhängigkeit der Schwingungsdauer vom Auslenkwinkel	$\Delta k = 0,0077$ ($k = 1$ für harmonisch) $g = 9,6598 \text{ m/s}^2$ $\Delta g = -0,1496 \text{ m/s}^2$	Korrektur mit Formel $g = g(k = 1) \cdot k^2$
Abhängigkeit des g-Werts vom Pendelmodell	Mathematisches harmonisches Pendelmodell: $g = 9,6666 \text{ m/s}^2$ $\Delta g = -0,1428 \text{ m/s}^2$	Geeignetes Pendelmodell
Vernachlässigung des Auftriebs	$\rho = 0$ $g = 9,8078 \text{ m/s}^2$ $\Delta g = -0,0016 \text{ m/s}^2$	g-Formel mit effektiver Masse

Scheinbare Drahtverkürzung durch Biegesteifigkeit des Drahts	Biegesteifigkeit des Drahts führt zu einem tiefer liegenden Drehpunkt und damit zu einer kürzeren Drahtlänge: $\Delta g > 0$	Aufhängung mit fester und möglichst reibungsfreier Drehachse
--	---	--

- c) Die größten Fehler entstehen durch zu ungenaue Messung der Periodendauer und der Drahtlänge, das Vernachlässigen der Anharmonizität des Pendels oder der Dehnung des Drahtes unter Belastung und durch ein zu stark vereinfachendes Pendelmodell. Unser Physiklernender kann durch Kombination von Fehlern unterschiedlichen Vorzeichens durchaus zu „guten“ Messergebnissen kommen: Z. B. wenn er die Verlängerung des Drahtes unter Belastung unberücksichtigt lässt und im mathematischen harmonischen Pendelmodell auswertet. Dann wird $\Delta g \approx 0,034 \text{ m/s}^2$. Für eine g-Bestimmung auf $0,005 \text{ m/s}^2$ müssen Fehler bzw. Abweichung möglichst vollständig minimiert bzw. berücksichtigt werden (vgl. letzte Spalte).

2. Längenänderung des Drahtes während der Pendelbewegung

- a) Die Schwerpunktschwindigkeit v_s wird mit dem Energieerhaltungssatz (Abnahme der potentiellen Energie gleich Zunahme der Rotationsenergie) unter Vernachlässigung der Reibung bestimmt:

$$mgh_0 - mgh = \frac{1}{2} J\omega^2$$

Mit der Beziehung zur Umrechnung von Winkel- in Schwerpunktschwindigkeit, der Näherung, dass die Pendelmassse im Pendelschwerpunkt konzentriert ist und geometrischer Beziehungen (Abb. 20) erhält man:

$$\omega = \frac{v_s}{l_s} \quad J \approx ml_s^2 \quad h = l_s(1 - \cos \alpha) \quad h_0 = l_s(1 - \cos \alpha_0)$$

Damit erhält man

$$v_s^2 = 2gl_s(\cos \alpha - \cos \alpha_0).$$

- b) Der radiale Anteil $F_{G,r}$ der statischen Gewichtskraft F_G und die Zentripetalkraft F_Z führen aufgrund des endlichen Elastizitätsmoduls E_D zu einer Längenänderung Δl des Drahtes.

$F_{G,r}$: Unter Vernachlässigung des Eigengewichts des Drahtes und mit der Tatsache, dass das Gewicht der Aufhängung von der Wandhalterung getragen wird erhält man nach Abb. 12

$$F_{G,r} = m_K g \cos \alpha \quad \text{für } |\alpha| \leq 90^\circ.$$

F_Z : Einsetzen des Ergebnisses aus a) in Formel für die Zentrifugalkraft ergibt, dass die Zentrifugalkraft unabhängig von l_s ist:

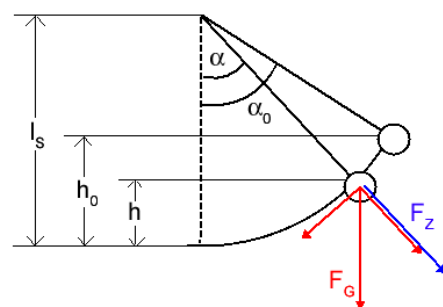


Abb. 20: Skizze zur Berechnung der Geschwindigkeit des Schwerpunkts.

$$F_Z = m \frac{v_s^2}{l_s} = 2mg(\cos \alpha - \cos \alpha_0)$$

Die Gesamtkraft F berechnet sich mit der Näherung $m_K \approx m$ zu

$$F = F_{G,r} + F_Z \approx mg \cos \alpha + 2mg(\cos \alpha - \cos \alpha_0) = 3mg \cos \alpha - 2mg \cos \alpha_0.$$

- c) Die Länge l und Längenänderung Δl eines Drahtes unter Belastung können nach dem Hookeschen Gesetz aus der Länge l_0 des unbelasteten Drahtes berechnet werden:

$$\sigma = \varepsilon E_D \Leftrightarrow \frac{F}{A_D} = \frac{l - l_0}{l_0} E_D \Leftrightarrow l = l_0 \left(1 + \frac{F}{E_D A_D}\right) \Leftrightarrow \Delta l = l - l_0 = l_0 \frac{F}{E_D A_D}$$

In unserem Fall beträgt die Länge l des Drahtes unter der Kraft F mit $b = \frac{mg}{E_D A_D}$

$$l = l_0 \left(1 + \frac{3mg \cos \alpha - 2mg \cos \alpha_0}{E_D A_D}\right) = l_0 (1 + 3b \cos \alpha - 2b \cos \alpha_0).$$

Die Länge l_0 des unbelasteten Drahtes kann aus der unter Belastung gemessenen Länge l_D des Drahts berechnet werden:

$$l_D - l_0 = l_0 \cdot \frac{mg}{E_D A_D} \Leftrightarrow l_0 = \frac{l_D}{1 + b}.$$

Die Längenänderung Δl_D des Drahtes gegenüber der unter Belastung gemessenen Länge l_D des Drahtes beträgt

$$\Delta l_D(\alpha, \alpha_0) = l - l_D = \frac{l_D}{1 + b} (1 + 3b \cos \alpha - 2b \cos \alpha_0) - l_D = l_D \frac{b}{1 + b} (3 \cos \alpha - 2 \cos \alpha_0 - 1).$$

Nach dem Diagramm (Abb. 21) schwankt die Länge des Pendels während der Schwingungsbewegung für $\alpha_0 = 10^\circ$ um ca. $150 \mu\text{m} = 0,15 \text{ mm}$. Die Existenz einer Länge $l = l_D$ bei $\alpha = \pm 8^\circ$ lässt sich qualitativ erklären:

Bei $\alpha = 0^\circ$ ist die Längenänderung $\Delta l_D = l - l_D > 0$, da außer der Kraft $F_{G,r} = mg$, die den Draht auf $l = l_D$ dehnt auch die maximale Kraft F_Z (v_s maximal) wirkt. Bei $\alpha = \pm \alpha_0$ ist die Längenänderung $\Delta l_D = l - l_D < 0$, da $F_Z = 0$ ($v_s = 0$) und $F_{G,r} < mg$ ist.

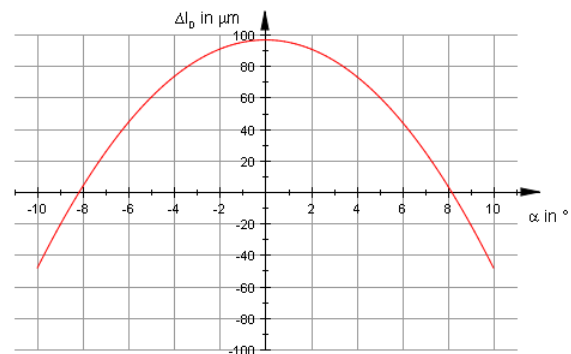


Abb. 21: Längenänderung des Drahtes in Abhängigkeit vom Auslenkwinkel für $\alpha_0 = 10^\circ$.

VII. Literatur

1. Greiner, W. (1984): Theoretische Physik, Band 1, 4. Aufl., Harry Deutsch.
2. Demtröder, W. (1998): Experimentalphysik 1 - Mechanik und Wärme, 2. Aufl., Springer.
3. CMA, [Coach 6 Studio MV](#).
4. DatasheetCatalog.com, <http://www.datasheetcatalog.net>.
5. Bronstein, I. (1981): Taschenbuch der Mathematik, 20. Aufl., Harry Deutsch.